ESTIMASI STATISTIK

Estimasi Rata-Rata & Proprosi

Pertemuan 11

BY : BIDA SARI, S.P., M.SI

Yang akan dibahas:

1. Pengertian Estimasi Statistik
2. Estimasi Titik Dan Estimasi Interval
3. Confidence Level Dan Kesalahan Estimasi
4. Estimasi Interval Mean (μ)
5. Estimasi Interval Perbedaa 2 Mean (μ_1 -μ_2)
6. Estimasi Proprosi (p)
7. Estimasi Interval Beda 2 Proporsi ($p_1 - p_2$)
8. Menentukan Jumlah sampel

DEFINISI ESTIMASI STATISTIK

Estimasi Statistik adalah :

- **suatu metode untuk memperkirakan nilai parameter populasi dengan memakai nilai sampel tertentu.**

Berdasarkan hasil penelitian pada sample kita ingin menarik kesimpulan tentang populasi dimana sample itu diambil.

Harga statistik yang dihitung dari semua sampel random dari suatu populasi digunakan untuk memperkirakan nilai-nilai parameter populasi, mengandung unsur ketidakpastian. Artinya kesimpulan tersebut bisa benar bisa juga salah, karena data yang digunakan adalah data pendugaan atau taksiran yang mengandung kesalahan dalam penarikan sampel.

Alasan "mengapa" sample statistik digunakan untuk menarik kesimpulan tentang populasi (menduga nilai parameter populasi):

1. Banyaknya individu populasi maka penelitian secara keseluruhan akan tidak ekonomis.

2. Menghemat tenaga, waktu dan biaya.

Estimasi Titik dan Estimasi Interval

Harga parameter dapat diestimasikan (diduga) dengan 2 cara :

1. **Estimasi titik (point estimation / pendugaan titik) :**

   harga parameter hanya diduga dengan satu harga (nilai tunggal) dari harga statistik sampelnya.

   Harus ditentukan pula besarnya kesalahan (error) yang dengan probabilitas tertentu mungkin dialami dalam pendugaan harga parameter itu. **Error =** $\overline{X} - \mu$

   Kesalahan harus kurang dari : $\boxed{\dfrac{z_{\propto/2} - s}{\sqrt{n}}}$

2. **Estimasi interval (interval estimation / pendugaan interval) :**

   Pendugaan harga-harga parameter populasi yang berada antara 2 batas nilai (min-max) dimana dengan probabilitas tertentu kita mengharapkan harga parameter yang hendak diduga terletak/berada dalam 2 batas nilai tersebut.

Estimator (penduga) :

Estimator (penduga) adalah :

1. **Fungsi dari harga-harga sample yg dipergunakan untuk tujuan menduga (membuat estimasi) harga parameter populasi berdasarkan satu sampel random yg diambil dari populasi yg bersangkutan.**
2. **Merupakan variabel random dan memiliki distribusi sampling**

Dalam statistik inferensia, $\hat{\theta}$, yang digunakan untuk menuduga parameter θ dari populasi :

Penduga	:	$\bar{x}$; p ; s ; r ; b
Parameter	:	μ ; P ; σ ; ρ ; β

$\bar{x}$ = X bar
σ = sigma
ρ = rho
β = beta

Ciri-ciri Estimator yang baik :

Dalam membuat estimasi harga parameter populasi seyogyanya variabel random harga statistik sample tidak bervariasi terlalu jauh dari harga parameter populasi yang konstan.

Penduga statistik yang baik jika memiliki ketentuan sbb :

1. Tidak bias (unbiased) $\rightarrow E(\hat{\theta}) = 0$ (θ baca "Theta")

Harga statistik sample merupakan penduga yang tidak bias (**Bias** = 0)

Jika : E (Harga statistic) = harga parameter , atau

Bias = E (harga statistic) – harga parameter **=** 0

unbiased

2. Efisien

Distribusi penduga harga statistik sebaiknya terpusat atau mempunyai deviasi standard yang kecil sekali. ($s \approx 0$)

3. Konsisten

Harga statistik merupakan penduga yang konsisten bila biasnya maupun deviasi standard mendekati 0 yaitu jika n tak hingga.

Jika bias = E (harga statistic – harga parameter) $\approx 0 \rightarrow$ konsisten

Semakin besar anggota sample (n), semakin kecil deviasi standardnya.

CONFIDENCE LEVEL & KESALAHAN ESTIMASI

Untuk membuat pendugaan interval, harus ditentukan terlebih dahulu besarnya koefisien keyakinan atau tingkat keyakinan (***confidence level = c.l***), yang diberi symbol **1-∝**, misalnya : c.l. =1 – ∝ = 0,90 , dimana ∝= 10% = 0,10, atau

c.l. = 1 – ∝ = 0,95, dimana∝= 5% = 0,05 , dll.

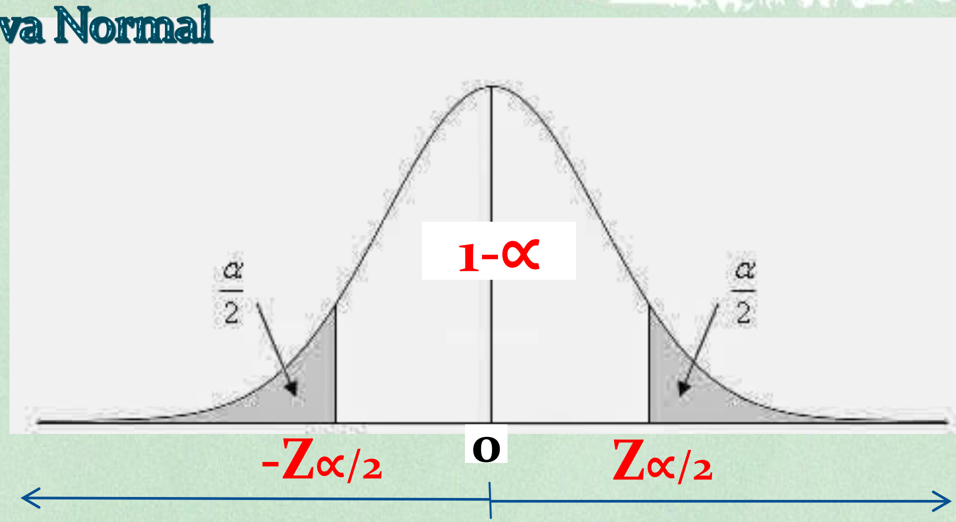
∝ = taraf signifikan yaitu besarnya kesalahan yang ditolerir di dalam membuat keputusan.

Ilustrasi : jika tingkat keyakinan $\overline{x}$ digunakan sebagai penduga mean populasi μ sebesar 0,90 atau c.l. = 90% artinya kesalahan ditolerir sebesar ∝=1 - 0,90=0,10 atau ∝= 10% → ∝/**2** = 5% = 0,05

Kesalahan yang mungkin terjadi : interval tidak memuat μ, artinya bisa lebih kecil dari nilai 95 atau lebih besar dari 105

Ilustrasi Confidence Level & taraf signifikan dengan pendekatan Kurva Normal

Kurva Normal



Luas Kurva **0,5** **0,5**

Pada **sampel besar** (n ≥ 30), untuk pendugaan(estimasi) diperlukan bantuan tabel **distribusi normal** (Tabel Z) yang dilambangkan dengan notasi **P (Z =x)**. Apabila diilustrasikan dengan grafik, **P (Z∝/2)= 0,5 - ∝/2** adalah luas kurva normal yang tidak diarsir sebelah kanan (karena positif).

Pada **sampel kecil** (n<30), untuk pendugaan(estimasi) diperlukan bantuan tabel **distribusi t** (Tabel t) yang dilambangkan dengan notasi **P (t ∝/2 ; df)**.

Pendugaan Interval rata-rata (μ) sampel Besar

1. Pendugaan untuk sampel besar (n ≥ 30) dari populasi yang tidak terbatas (infinite population) atau dari populasi terbatas (finite population) akan tetapi penarikan sampel dilakukan dengan pengembalian kembali (with replacement) :

$$\bar{X} - \underbrace{z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\text{Error}}$$

2. Rumus untuk populasi terbatas, tetapi sampel sebanyak n diambil tanpa pengembalian kembali (without replacement) dari populasi dengan N elemen dan σ diketahui

$$\bar{X} - z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} < \mu < \bar{X} + z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

By : BIDA SARI, SP, MSi

Contoh 1 :

100 orang calon mahasiswa Akademi Ilmu Statistik sebagai sampel acak, yang sudah mengikuti tes IQ, mempunyai rata-rata sebesar 110 dan diketahui mempunyai simpangan baku sebesar 20. Dengan menggunakan tingkat keyakinan sebesar 95%, buatlah pendugaan interval dari rata-rata IQ!

Jawab:

$n = 100$, $\bar{X} = 110$, $\sigma = 20$

$1 - \alpha = 95\%$, $\alpha = 5\%$, $\alpha/2 = 2{,}5\% = 0{,}025 \rightarrow$ Cari nilai $Z_{\alpha/2} = Z_{0{,}025}$

$P(Z_{0{,}025}) = (0{,}5 - 0{,}025) = 0{,}4750$, maka $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$ (dari tabel distribusi normal, Tabel Z)

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

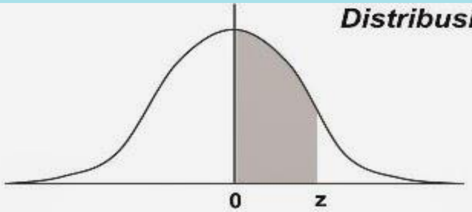
$$110 - 1{,}96\frac{20}{\sqrt{100}} < \mu < 110 + 1{,}96\frac{20}{\sqrt{100}}$$

$$106{,}8 < \mu < 113{,}92$$

Rata-rata IQ berada pada interval antara 106,8 dan 113,92 dengan tingkat keyakinan sebesar 95%.

Kumulatif sebaran frekuensi normal
(Area di bawah kurva normal baku dari 0 sampai z)

Distribusi Z



Tabel Z

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936

Pendugaan interval rata-rata (μ) sampel Kecil

3. Rumus untuk sampel kecil (n≤30) diambil dari populasi, σ tidak dketahui, dengan pengembalian kembali

$$\bar{x} - t_{\propto/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\propto/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(xi - \bar{x})^2} = \text{perkiraan } \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \text{ standar deviasi}$$

Rumus 3 diperoleh dari rumus 1 dengan mengganti σ dengan s dan $z_{\propto/2}$ dengan $t_{\propto/2}$

- Tabel **z** untuk menghitung probabilitas sampel besar ($n > 30$)
- Tabel **t** untuk menghitung probabilitas sampel kecil ($n < 30$)

Contoh 2 :

Lima orang mahasiswa FEB UPI YAI dipilih secara acak kemudian diukur tingginya (dalam cm): $X_1 = 160$, $X_2 = 170$, $X_3 = 165$, $X_4 = 175$, $X_5 = 180$. Buatlah pendugaan interval tentang rata-rata tinggi mahasiswa FEB UPI YAI dengan tingkat keyakinan sebesar 95%.

Jawab: n= 5

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum Xi = \frac{1}{5}(X_1 + X_2 + \ldots + X_5)$$

$$\overline{X} = \frac{1}{5}(160 + 170 + 165 + 175 + 180) = \frac{850}{5} = 170$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma(Xi - \overline{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{5-1}(-10)^2 + 0^2 + (-5)^2 + 5^2 + 10^2} = 7{,}9057$$

$$S_X = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{7{,}9057}{\sqrt{5}} = \frac{7{,}9057}{2{,}2361} = 3{,}53$$

Karena n < 30, harus digunakan nilai **t** → $t_{\alpha/2}$ (n-1) derajat kebebasan (df)

Lanjutan jawaban Contoh 2 :

Tingkat keyakinan : c.I = 1- α = 0,95

$\rightarrow \alpha = 5\%,\ \frac{\alpha}{2} = 2,5\% = 0,025$

$t\ \alpha/2\ (n-1) = t_{0,025}(5-1) = t_{0,025}(4) = 2,7765 = 2,78$

$\overline{X} - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$

$170 - (2,78)(3,53) < \mu < 170 + (2,78)(3,53)$

$160,2 < \mu < 179,8$

Rata-rata tinggi mahasiswa FEB UPI YAI dengan tingkat keyakinan sebesar 95% akan berada dalam interval antara 160,2 cm dan 179,8 cm.

Tabel t

dk	α untuk Uji Satu Pihak (*one tail test*)					
	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
	α untuk Uji Dua Pihak (*two tail test*)					
	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,692	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,691	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,690	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,689	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,688	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,687	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

$t_{0,025}(4) = 2,776$

Pendugaan Interval Perbedaan 2 Mean (µ1 - µ2), sampel Besar

1. Rumus untuk sampel besar (n > 30, $\sigma_1^2\ dan\ \sigma_2^2\ diketahui$)
Bila sampelnya besar, distribusi sampling harga perbedaan antara dua mean dianggap mendekati distribusi normal.

→ menggunakan Tabel Z

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - z_{\propto/2}.\sigma(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + z_{\propto/2}.\sigma(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)$$

$$\sigma_{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$ → Simpangan baku gabungan

Bila variansi dua populasi itu tidak sama besarnya yaitu $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ dan kedua variansi tidak diketahui nilainya, maka interval kepercayaan (1-α) untuk beda dua rata-rata (μ1 - μ2) dari dua populsai tersebut adalah :

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - Z_{\propto/2,v} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + Z_{\propto/2,v} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

Pendugaan Interval Perbedaa 2 Mean (μ1 - μ2), sampel Kecil

2. Rumus untuk sampel kecil (n≤ 30, σ_1^2 dan σ_2^2 tak $diketahui$)

Bila sampel kecil, diambil dari dua populasi normal maka didapatlah distribusi nilai t. → menggunakan Tabel t

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - t_{\propto/2}.\, s(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + t_{\propto/2}.\, s(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)$$

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{\alpha/2,\upsilon}\; S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t_{\alpha/2,\upsilon}\; S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

di mana : derajat kebebasan $\upsilon = n_1 + n_2 - 2$

Simpangan baku gabungan :

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^{\,2} + (n_2-1)S_2^{\,2}}{n_1+n_2-2}}$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum(X_{i1} - \overline{x}_1)^2 \qquad S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum(X_{i2} - \overline{x}_2)^2$$

Contoh 3 :

Seorang ahli bola lampu sedang melakukan penelitian terhadap sejenis bola lampu dengan merek yang berbe da, katakanlah merek A dan merek B. dia ingin mengeta hui apakah ada selisih atau perbedaan rata-rata lamanya hidup (*expected life*) dari kedua bola lampu tersebut. Untuk maksud itu masing-masing merek diselidiki seba nyak 100 buah yang dipilih secara acak. Ternyata merek A bisa menyala rata-rata selama 3600 jam, sedangkan merek B selama 3500 jam. Diketahui simpangan baku me rek A = 200 jam dan merek B = 200 jam. Dengan menggu nakan tingkat keyakinan sebesar 90%, hitunglah pendu gaan interval selisih rata-rata lamanya hidup dari kedua bola lampu tersebut!

Jawaban Contoh 3 :

Diketahui : $n_1 = n_2 = 100$ $\quad \overline{x}1 = 3600$ $\quad \overline{x}2 = 3500$

$\overline{x}1 - \overline{x}_2 = 100$ $\quad \sigma_1^2 = (200)^2 = 40.000$ $\quad \sigma_2^2 = (200)^2 = (40.000)$

$(1- \alpha) = 0,90 \rightarrow \alpha = 1- 0,90 = 0,10 \rightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0,05} = 1,64$

$$\sigma_{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{80.000}{100}} = 28,28$$

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - Z_{\alpha/2}\,\sigma_{(\overline{X_1} - \overline{X_2})} < (\mu_1 - \mu_2) < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + Z_{\alpha/2}\,\sigma_{(\overline{X_1} - \overline{X_2})}$$

$$100 - 1,64\,(28,28) < (\mu_1 - \mu_2) < 100 + 1,64(28,28)$$

$$53,62 < (\mu_1 - \mu_2) < 146,38$$

Jadi interval antara 53,62 jam dan 146,38 jam akan memuat selisih rata-rata lamanya hidup dari bola lampu kedua merek dengan probabilitas 90%.

Contoh 4 :

Untuk mengetahui apakah ada perbedaan rata-rata gaji bulanan bagi para karyawan dari 2 perusahaan A dan B, maka dilakukan wawancara terhadap 9 orang karyawan yang dipilih secara acak sebagai sampel dari masing-masing perusahaan.

Hasil wawancara adalah sebagai berikut:

Buatlah pendugaan interval dari selisih/perbedaan rata-rata gaji tersebut dengan tingkat keyakinan 95%!

Karyawan	Gaji per Bulan Dalam ribuan rupiah	
	Perusahaan A	Perusahaan B
1.	40	30
2.	46	24
3.	50	16
4.	36	25
5.	38	35
6.	34	40
7.	42	46
8.	44	38
9.	30	34

Jawaban Contoh 4 :

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1}\sum X_{n1} = \frac{1}{9}(40 + 46 + \dots + 30) = \frac{360}{9} = 40 \text{ (Rp. 40.000,-)}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2}\sum X_{n2} = \frac{1}{9}(30 + 24 + \dots + 34) = \frac{288}{9} = 32 \text{ (Rp.32.000,-)}$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum(x_{i1} - \bar{x}_1)^2 = \frac{312}{8} = 39 \text{ (Rp.39.000,-)}$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum(xi2 - \bar{x}_2)^2 = \frac{682}{8} = 85{,}25 \text{ (Rp. 85.250,-)}$$

$$s_{(X_1 - X_2)} = \sqrt{\frac{312+682}{16}}\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = 3{,}72 \text{ (Rp. 3.720,-)},$$

derajat kebebasan : df = $n_1 + n_2 - 2 = 16$

$\alpha = 5\% \rightarrow t_{\alpha/2} = t_{0,025}(16) = 2{,}1199 = 2{,}12$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2}\, s_{(X_1 - X_2)} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2}\, s_{(X_1 - X_2)}$$

$$8 - 2{,}12\,(3{,}72) < (\mu_1 - \mu_2) < 8 + 2{,}12\,(3{,}72)$$

$$0{,}11 < (\mu_1 - \mu_2) < 15{,}89$$

Jadi selisih rata-rata gaji per bulan karyawan perusahaan A dan B berada pada interval antara Rp. 110 dan Rp. 15.890 dengan probabilitas 95%.

Pendugaan Proporsi (p)

Prosedur penaksiran proporsi populasi adalah sama dengan penaksiran rata-rata populasi, sbb :

1. Cari proporsi sampel $\hat{p}$. Proporsi sampel adalah penaksiran titik. $\hat{p}$ adalah penaksiran yang baik bagi proporsi populasi P.

2. Hitung standar deviasi proporsi dengan rumus :

$$\sigma p = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \rightarrow p = \frac{x}{n}, \quad q = 1 - p$$

Rumus untuk menduga proporsi P dengan Interval kepercayaan (1 - α) adalah

Sampel besar (n > 30) :

$$\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} < P < \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Sampel kecil (n ≤ 30) :

$$\hat{p} - t_{0.5\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + t_{0.5\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

- Table z untuk menghitung probabilitas sampel besar ($n > 30$)
- Table t untuk menghitung probabilitas sampel kecil ($n \leq 30$)

Contoh 5 :

Dari hasil survey yang dilakukan suatu research agency mengenai kebiasaan ibu rumah tangga menyaksikan taya ngan iklan di TV Swasta. Ternyata diperoleh hasil bahwa 76 orang dari 180 orang ibu rumah tangga yang dipilih se cara acak, biasa menyaksikan tayangan iklan paling sedi kit 2 jam per minggu. Jika peneliti tersebut menggunakan taraf konfidens sebesar 90%, maka tentukan interval esti masi seluruh ibu rumah tangga yang biasa menyaksikan tayangan iklan paling sedikit 2 jam per minggu.

Jawaban Contoh 5 :

Diketahui : Misalkan X adalah ibu rumah tangga yang biasa menyaksikan tayangan iklan paling sedikit 2 jam per hari. n = 180 dan X = 76 sehingga

$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 10\% = 0,1 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow Z\alpha/2 = Z_{0.05} = 1,645$

$$\hat{p} - Z_{0.5\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + Z_{0.5\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$0.42 - 1.645\sqrt{\frac{0.42(1-0.42)}{180}} < p < 0.42 + 1.645\sqrt{\frac{0.42(1-0.42)}{180}}$$

$$0.42 - 0.060515732 < p < 0.42 + 0.060515732$$

$$0.359484268 < p < 0.480515732$$

$$0.359 < p < 0.481$$

Proporsi ibu-ibu yang biasa menyaksikan tayangan iklan paling sedikit 2 jam per hari antara 35.9% dan 48.1% dengan taraf konfidens sebesar 90%

Pendugaan Perbedaan 2 Proporsi (p1 – p2)

Sampel besar (n > 30) :

$$(p_1 - p_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}} < P_1 - P_2 < (p_1 - p_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}$$

Sampel kecil (n ≤ 30) :

$$(p_1 - p_2) - t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}} < P_1 - P_2 < (p_1 - p_2) + t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}$$

Rumus 2 diperoleh dari rumus 1 dengan mengganti σ dengan s dan $z_{\propto/2}$ dengan $t_{\propto/2}$

- Table z untuk menghitung probabilitas sampel besar ($n > 30$)
- Table t untuk menghitung probabilitas sampel kecil ($n \leq 30$)

Contoh 6 :

Dua sampel acak masing-masing terdiri 700 mahasiswa dan 500 mahasiswi yang mengunjungi suatu bazar buku murah. Ternyata setelah kedua sampel tersebut diperiksa, terdapat 392 mahasiswa dan 325 mahasiswi yang merasa puas dengan adanya bazar terse but. Tentukan interval konfidens sebesar 98% untuk mengestimasi perbedaan proporsi mahasiswa dan mahasiswi yang merasa puas terhadap bazar buku murah tersebut.

Jawaban :

Diketahui : $n_1 = 700$, $x_1 = 392 \rightarrow \quad \hat{p}_1 = \dfrac{392}{700} = 0.56$

$n_2 = 500$, $x_2 = 325 \rightarrow \quad \hat{p}_2 = \dfrac{325}{500} = 0.65$

Karena sampelnya besar, maka $1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow Z\alpha/2 = Z_{0.01} = 2.33$

$$(p_1 - p_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}} < P_1 - P_2 < (p_1 - p_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}$$

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - d < p_1 - p_2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + d$$ dimana $$d = Z_{0.5\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

Lanjutan Jawaban Contoh 6 :

$$d = Z_{0.5\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

$$d = 2.33\sqrt{\frac{0.56(1-0.56)}{700}+\frac{0.65(1-0.65)}{500}} = 0.065905969 = 0,066$$

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-d < p_1-p_2 < (\hat{p}_1-\hat{p}_2)+d$$

$$(0.56-0.65)-0.066 < p_1-p_2 < (0.56-0.65)+0.066$$

$$-0.09-0.066 < p_1-p_2 < -0.09+0.066$$

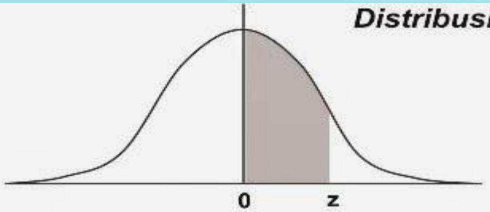
$$-0.156 < p_1-p_2 < -0.024$$

Kita merasa yakin sebesar 98% proporsi mahasiswi yang merasa puas terhadap bazar buku antara 2.4% dan 15.6%.

Kumulatif sebaran frekuensi normal
(Area di bawah kurva normal baku dari 0 sampai z)

Distribusi Z

Tabel Z



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936

Menentukan Besar Sampel (n) :

Perhitungan besaranya error dapat digunakan untuk menentukan berapa besarnya sampel random yang harus diambil untuk mendapatkan hasil dengan tingkat ketepatan atau *accuracy* tertentu

* **Jika yang akan diestimasi adalah rata-rata (μ) :**

Besarnya error : $E = \frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}$ → Besarnya sampel : $n = \left[\frac{Z_{\alpha/2} . \sigma}{E}\right]^2$

* **Jika yang akan diestimasi adalah proporsi (p) :**

Besarnya error : $E = Z_{0.5\alpha} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ → Besarnya sampel : $n = p. (1-p) \left[\frac{Z_{\alpha/2}}{E}\right]^2$

→ Besarnya sampel : $n = 1/4 \left[\frac{Z_{\alpha/2}}{E}\right]^2$ → Pembuktian

Menentukan Besar Sampel (n) :

Jika besarnya p (1 – p) tidak diketahui tetapi oleh karena nilai p selalu antara 0 dan 1 maka besarnya p(1 – p) maksimum dapat dicari : $f(p) = p\,(1 - p) = p - p^2$

$$f'(p) = \frac{df(p)}{d(p)} = 1 - 2p$$

Apabila $\frac{df(p)}{d(p)} = 0 \rightarrow 1-2p = 0 \rightarrow p = 1/2$ maka nilai maksimum dari $f(p) = p\,(1 - p) = ½ \,.\, ½ = ¼$.

Jadi besarnya sampel random yang harus diambil (n) dapat dihitung :

Besarnya sampel : $n = p\,(1 - p)\left[\frac{Z_{\alpha/2}}{E}\right]^2 = 1/4.\left[\frac{Z_{\alpha/2}}{E}\right]^2$

Contoh 7 :

Andaikan diantara pelat baja yang dibuat melalui suatu p roses tertentu memiliki distribusi normal dengan σ = 0,50, berapa besarnya sampel yang harus kita ambil agar kita 95% yakin bahwa rata-rata sampelnya tidak akan berselisih dari rata-rata populasinya lebih dari 0,1 ?

Jawaban :

Diketahui :

$\sigma = 0{,}50$ **E = 0,1**

c.I = 1 – α = 95% =0,95 → α = 5% = 0,05 → α/2 = 0,025

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$$

$$n = \left[\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right]^2 = \left(\frac{1{,}96 \times 0{,}50}{0{,}1}\right)^2 = 96{,}04$$

Jadi besarnya sampel yang harus diambil = 96

Contoh 8 :

Mr. X akan dinyatakan menang dalam pemilihan gubernur, jika ia berhasil mengumpulkan suara paling sedikit 51%. Dari pemilihan sebelumnya ia mendapatkan suara 55%. Untuk menjajagi penca lonan Mr. X agar terpilih lagi menjadi gubernur yang kedua kali n ya, maka diambil sampel acak berukuran n pemilih. Agar Mr. X merasa yakin 95% akan terpilih lagi menjadi gubernur untuk ke-2 kalinya, maka berapakah n tersebut.

Jawaban :

Diketahui : p = 51% = 0,51 , E = (55 - 51)% = 4% = 0,04

c.I = 1 – α = 95% =0,95 → α = 5% = 0,05 → α/2 = 0,025

$Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96$

Besarnya sampel : $n = p\,(1 - p)\left[\frac{Z_{\alpha/2}}{E}\right]^2$

$$= 0,51\,(1 - 0,51)\,.\left[\frac{1,96}{0,04}\right]^2 = 150,0$$

Contoh 9 :

Depkes dan Depdiknas bekerjasama untuk mengadakan penelitian mengenai persentase murid SD yang sakit gigi. Supaya dengan ta raf konfidens 95% diperoleh perbedaan antara persentase sebenar nya dengan persentase dugaan tidak lebih dari 4%, maka harus berapa murid SD yang dijadikan sampel.

Jawaban :

Diketahui : E = 4% = 0,04

c.I = 1 – α = 95% =0,95 → α = 5% = 0,05 → α/2 = 0,025

$Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96$

Besarnya sampel : $n = p(1-p)\left[\frac{Z_{\alpha/2}}{E}\right]^2 = 1/4.\left[\frac{Z_{\alpha/2}}{E}\right]^2$

$$= 1/4.\left[\frac{1,96}{0,04}\right]^2 = 600,25$$

Latihan : Estimasi Mean dan Beda 2 Mean

1. Untuk menjaga cash-flow yang aman, sebuah perusahaan pemasok bahan bangunan ingin mengestimasi rata-rata saldo kredit dari para debiturnya. Untuk itu, diambil secara acak sampel berukuran 25 debitur, dan diperoleh rata-rata saldo kredit sebesar US$ 3200 dengan standar deviasi US$ 350. Tentukan interval estimasi rata-rata saldo kredit para piutang perusahaan tersebut, sehingga pimpinan perusahaan akan merasa yakin sebesar 90% terhadap kebenaran estimasi tersebut.
2. Sampel acak yang terdiri dari 22 orang buruh perusahaan A telah diperiksa ternyata rata-rata waktu menyelesaikan pekerjaannya per unit barang adalah 12 menit dengan standar deviasi 2 menit. Sedangkan dari perusahaan B yang sejenis diambil sampel acak berukuran 20, setelah diperiksa ternyata rata-rata menyelesaikan pekerjaan yang sama adalah 11 menit dengan standar deviasi 3 menit. Tentukanlah interval keyakinan sebesar 95% untuk mengestimasi beda rata-rata waktu penyelesaian pekerjaan semua buruh di perusahaan A dan perusahaan B. Asumsi $\sigma_1 = \sigma_2$

Latihan : Estimasi Proporsi dan Beda 2 Proporsi

3. Seperempat dari 300 konsumen yang diwawancarai secara acak menyatakan tidak suka sabun mandi merk "X". Jika digunakan taraf konfidens 95%, tentukanlah interval estimasi seluruh konsumen yang tidak menyukai sabun merk "X" tersebut.

4. Untuk mengetahui perbedaan proporsi ketaatan pemilik mobil melunasi PKB d Kota A dan Kota B, diambil secara acak sampel di Kota A sebanyak 100 mobil dan ternyata 72 mobil telah melunasi PKB. Sedangkan di Kota B dari sampel acak sebanyak 100 mobil, ternyata 66 mobil yang sudah melunasi pajaknya. Tentukanlah interval konfidens sebesar 90% untuk mengestimasi beda proporsi pemilik mobil yang taat melunasi pajak di kedua kota tersebut.